

文章编号 1004-924X(2009)09-2120-08

激光粒度测量的综合反演及参数选择

王燕民, 陈琪星, 潘志东

(华南理工大学 材料科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 为了有效地将激光粒度仪所获得的光能分布反演为颗粒粒度分布, 提出了一种无模式综合反演算法, 即二阶段迭代算法。该算法综合采用了改进的共轭梯度法和松弛迭代法的优点, 使用共轭梯度法做第一步预迭代, 利用其快速收敛性和解的平滑性得到第二步迭代的初始解; 然后, 使用正则化方法对原问题进行修正处理以得到具有较好稳定性的正则化方程; 最后, 采用改进的松弛迭代法把第一步预迭代的解作为初始解对改进后的正则化方程进行迭代求解。对算法进行了分块操作, 并对所有模块如共轭迭代法、正则化法、松弛迭代法进行分析, 指出各模块的可行性与必要性, 同时进行各模块参数的独立和综合的最优化选择。相比于单独地使用以上某一种方法, 该综合方法能同时改进解的稳定性和准确性, 对单峰和多峰分布的国家标准样品及具备噪声的模拟信息测试也取得了较好的分辨精度。

关键词: 激光测量; 粒度测量; 光能; 反演算法

中图分类号: TP391.4; TN247 **文献标识码:** A

Hybrid inversion algorithm for laser scattering particle size analyzer and its parameter selection

WANG Yan-min, CHEN Qi-xing, PAN Zhi-dong

(College of Material Sciences & Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: A hybrid algorithm combining the characteristics of a conjugate gradient iteration method, a regularization equation and a Successive Over Relaxation (SOR) technique, namely, two-segment iterative method, is proposed to reverse efficiently the light intensity distribution into the particle size distribution in a laser particle sizer. The process of convergence can be speeded up and the smoothness of the solution can be enhanced by taking the conjugate gradient iteration as the pre-iteration of next SOR iteration. The solution obtained from the first step treatment is used as the initial solution for the second step. Then, a regularization method is used to correct to the original problem to obtain a stable regularized equation. Finally, the improved SOR method is taken to resolve the regularized equation. Experimental results show the two-segment method can achieve an accurate and stable final solution to this problem. This method is examined with the national standard particulate samples and the theoretical noisy signal, and the results indicate the method is able to distinguish multi-peak particle size distribution (PSD) and can smooth noisy signals.

Key words: laser measurement; particle size analysis; light energy; inversion algorithm

收稿日期: 2008-09-09; 修订日期: 2008-10-27.

基金项目: 广州市科技攻关计划资助项目 (No. 2007E3-D2091)

1 引言

与其它颗粒粒度测试仪器相比,激光粒度仪具有测量范围宽、分析速度快、再现性好、可实现在线测量等特点,因此已成为颗粒测试应用最为广泛的仪器之一。现代激光粒度仪大多基于 Mie 散射原理,即光散射原理。当一束细的平行激光照射到待测颗粒上时,部分光能被散射,由于不同粒径的颗粒对同一波长激光的散射光能在光电探测器阵列上的分布不同,即可以根据实测的光能分布来逆推待测颗粒群的颗粒粒度分布。因此,对于激光粒度仪所获得光能分布进行反演算法的研究是改进其测量准确度的重要研究课题之一。已有的反演算法可以分为分布函数算法和无分布函数算法两类,又分别称为模式算法和无模式算法。模式算法假设被测颗粒体系的颗粒尺寸分布满足某个已知的分布函数(如 Rosin-Rammler 分布或正态分布等),因此可以通过一定的优化方法来确定分布函数中的待定参数。无模式算法不需事先假定被测颗粒体系的分布形式,而是根据实际测量结果直接求解第一类 Fredholm 积分方程。现代的反演算法主要采用无模式算法^[1-7]。而目前常用的激光粒度仪无模式反演算方法各有其优点和缺点,难以达到稳定性与准确性的统一。

作者曾提出一种综合的无模式反演算法^[6],即二阶段迭法算法。该算法综合了共轭梯度法、Tikhonov 正则化和松弛迭代法等 3 种方法,一定程度上改进了反演算法的准确性和稳定性。与标准颗粒样品比较验证后表明,此无模式综合反演算法无论是准确度、稳定性、速度和光滑性均在一定程度上达到了实际应用的要求。为了从理论上了解这种无模式综合算法反演激光光强分布相对所测颗粒粒度分布的可行性,本文分析了共轭梯度法、正则化处理法和松弛迭代法 3 个模块对该算法的贡献,并分别讨论了每个模块对整个算法的全局性影响和有效参数的选择问题。

2 算法的理论分析与参数选择

由于该算法是由共轭梯度法、正则化处理法

和松弛迭代法 3 部分综合而得,因此,需要分别讨论每个模块对整个算法的全局性影响,这里从如下几个方面对各种模块的作用进行讨论。

(一)收敛性,是指算法每一步迭代的结果与未知的真实解之间的差别。好的迭代法具有好的收敛性,一方面是指算法的解能在有限步迭代过程内趋向于未知的真实解;另一方面是指这一收敛过程应该够快够稳定。

激光粒度仪的反演算可以看作是对 $\mathbf{M}\mathbf{x}=\mathbf{E}$ 的求解(式中 \mathbf{M} 代表 Mie 散射矩阵, \mathbf{x} 代表颗粒分布, \mathbf{E} 代表光靶接收到的光能)。由于 \mathbf{M} 矩阵是一个非对称矩阵,不利于迭代法求解,故将原式化为 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}$ 的形式,便可写成:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b},(\mathbf{A}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M},\mathbf{b}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}). \quad (1)$$

对于求形如 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的对称线性方程,有些学者^[5]认为可以把此反演问题等价为解决 x 使式 $(\|\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2+\|\mathbf{x}\|_2)$ 取得最小值的问题,因此,这里分别用余值 $\|\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$ 和 $\|\mathbf{x}\|_2$ 的变化来表征收敛性。其中前者表示的是迭代解与真实解的距离,后者是指迭代解本身及其光滑性,必须使 $\|\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$ 和 $\|\mathbf{x}\|_2$ 都尽量小。但是,一般情况下,两者又是相互冲突的,研究其收敛性时不免要在其中取一个折衷点,使两者都足够小。

(二)解的稳定性,解的稳定性包括两层含义,其一是由于在实际应用中,算法不可避免地要与各种误差打交道,具有一定的稳定性,能抵抗一定程度的误差是一套成熟算法必须具备的性能;其二,求解过程中应保持稳定的迭代,这是为避免所求的解在前一次迭代和后一次迭代中变化太大而影响迭代次数的选择。

2.1 共轭预迭代对算法的影响

共轭梯度法作为一个预处理模块,在算法中处于第一阶段。之所以采用共轭梯度法作为预迭代,是因为相对于其它的迭代法,它具有良好的收敛性。下面对共轭梯度法的收敛性进行分析,通过对比分析有无共轭梯度法作为预迭代的算法之间的差别,来验证这一模块的可行性和必要性。

2.1.1 共轭梯度法的收敛性

从收敛性来看,共轭梯度法要远远优于松弛迭代法,如图 1 所示。

从图 1(a)中可知,共轭梯度法的第 50 次迭

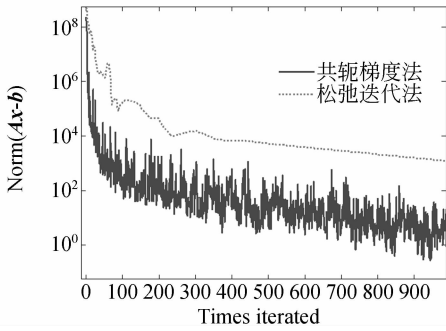
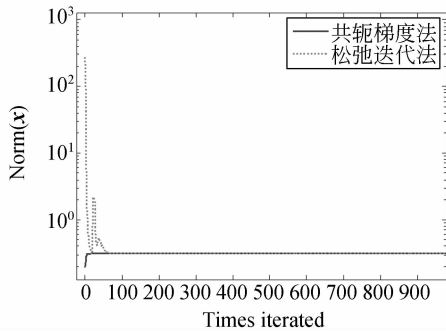
(a) 余值 $(Ax-b)$ (a) $\text{norm}(Ax-b)$ (b) 余值 (x) 矩阵向量(b) $\text{norm}(x)$

图 1 共轭梯度法与松弛迭代法的余值图比较

Fig. 1 Dynamic trends of $\text{norm}(Ax-b)$ and $\text{norm}(x)$ during the CG and the SOR iterations

代结果已经可以达到松弛迭代法的第 1 000 次迭代结果,其速度方面的优势使之既能大幅度减少计算机的工作量,缩短计算时间,又能产生余值较低的第二次迭代初值。图 1(b)也表明,对于余值 $\text{norm}(x)$,共轭梯度法在第 50 次左右时和松弛迭代法处在同一水平。综合权衡这两项余值关系,将迭代次数设为 50 左右,以兼顾两项余值,即使解的准确性和光滑性达到一个平衡。

虽然共轭迭代法产生的解在准确性方面优于松弛迭代法,但是,仅凭共轭迭代法是无法得到非负解的,也就是说,共轭迭代法只能作为一个预迭代模块以取得较优的第二步迭代初值,仍需进行后续求解。

2.1.2 采用共轭梯度法作为预迭代

下面比较采用共轭梯度法作为预迭代法和采用松弛迭代法的解。图 2 描述了两种方法得到的

迭代余值,由上节得到了单纯用松弛迭代法进行 1 000 次迭代以及采用共轭梯度法迭代 50 次后再采用松弛迭代法对行迭代的余值走向图(如图 1(b)),从而验证了采用共轭梯度法作为预迭代的可行性和必要性。

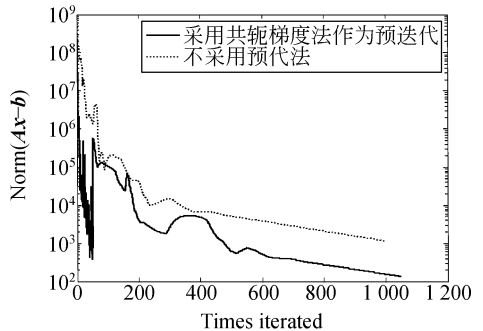


图 2 采用共轭梯度法作为预迭代法和采用松弛迭代法的余值图比较

Fig. 2 Dynamic trend of $\text{norm}(Ax-b)$ with or without the CG preconditioned iteration

由图 2 可知,采用共轭梯度法作为预迭代的方法兼顾了收敛速度和稳定性,使解能稳定地达到所要求的余值精度。说明采用预迭代法无论从收敛性、稳定性和各项余值方面均优于单纯的松弛迭代法。

2.2 正则化处理对算法的影响

通过验证可知采用共轭梯度作为预迭代能给算法带来良好的收敛特性,但同时发现这种算法在抵抗噪声方面并不理想,因此,有必要对算法的抗噪性能进行改良,本节即是采用正则化处理对算法进行改进的过程。

2.2.1 正则化对方程的病态性改良

若方程 $Ax=b$ 是病态的,即是说当 b 有极小的变化(各种误差)而成为 \tilde{b} 时,所解得的 \tilde{x} 与原问题的 x 相差甚远。而表征这种病态性一般采用条件数 $\text{cond}(A)$,其计算公式为:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (2)$$

条件数越大,方程病态性越严重,越难求得稳定解。为了降低方程的病态性,可以采用与原方程 $Ax=b$ 邻近而条件数更低的 $(A + \alpha L^T L)x = b$ 来代替原方程。可以看出如果正则化参数 α 和正则化矩阵 L 取得合适,符合原方程 $Ax=b$ 的解 x 可近似地满足正则化后的方程 $(A + \alpha L^T L)x = b$ 。

当 $L=I$ (单位矩阵)时,称为 Tikhonov 正则化的标准形式^[3],这里用 Tikhonov 的标准形式做一系列的对比。

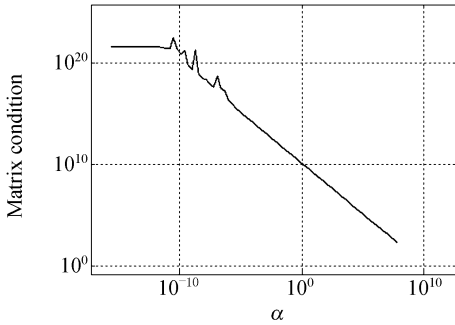


图 3 Tikhonov 标准形式中正则化参数对矩阵条件数的影响

Fig. 3 Effect of regularization parameters on matrix condition index in Tikhonov

由图 3 可见,一般地,正则化参数越大,矩阵条件数越小。不作正则化时, A 的条件数为 $3.748 0 \times 10^{21}$, 而当 $\alpha=1$ 时, $A+I$ 的条件数为 $1.276 7 \times 10^{10}$, 即 A 与 $A+\alpha L^T L$ 的条件数相差 10^{11} 倍。而且,在 A 的对角线上每一个元素值加 1 一般不会对原方程造成多大的改变。

然而,并不是正则化参数取得越大越好,显然正则化前提是用邻近病态性较小的方程来取代原方程。正则参数取得越大,方程越来越偏离原方程,这样所求的解也就没有任何意义了。为了说明正则化参数对解的影响,采用图例法举出正则化参数 $\alpha=5^n$, ($n=0, 1 \dots 9$) 时解的变化

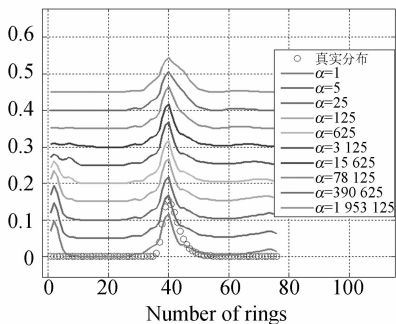


图 4 不同正则化参数对 Tikhonov 标准型正则化解的影响

Fig. 4 Effect of different regularization parameters on solutions of Tikhonov regularization

从图 4 中可知,正则化参数取得越大,解越光滑,而且在解左端的意外小峰和右端的凸起也会逐渐消失,这说明解的稳定性也有所提高。但同时解也变得扁平,从而使颗粒分布变宽。对算法有改良作用的 α 值大约应取为 $15 625 \sim 3.90 625$ 。为了讨论在正则化参数选取过程中计算光能、假设光能和噪声光能的拟合程度,从余值、光能曲线和解的对比 3 个方面分别进行分析。

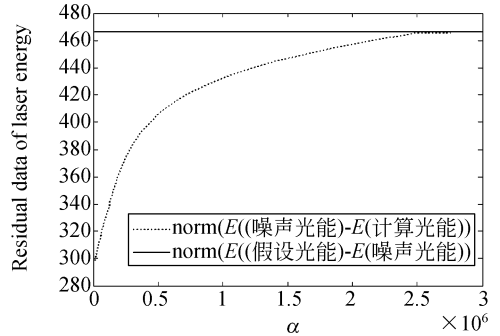


图 5 正则化参数对光能余值的影响

Fig. 5 Influence of regularization parameters on residual data of laser energy

图 5 为正则化参数 α 在 $0 \sim 3 \times 10^6$ 噪声光能与假设光能的对比余值,可见其一直小于噪声光能与假设光能的对比余值。单从余值的角度上来讲,图 8 表明了正则化参数 α 在 $9 \sim 10^6$ 时反演算的解比假设解能更好地拟合加入噪声后的光能数据,即在数学意义上是优异的。为了更直观地表明其数学上的优越性,将选取正则化参数 $\alpha=10^6$ 时的假设噪声与反演算光能曲线进行对比,以确定数学意义上的拟合程度;然后比较反演算的解与假设解,以观解的现实可信度。

从光能曲线对比结果(图 6)可见,在反演算加入噪声光能时,其光能值在大体上和细节上都比假设光能值更接近加入噪声的光能曲线。从解的对比图中也可以看出,不仅反演算的解和假设解在大体上重合度较好,而且反演算的解具有不错的光滑性。需要解释的一点是在 70 环处出现的小峰并不能说明它一定是一个意外峰,这是因为所用来反演算的数据是加入 10% 噪声后的数据,那么加入噪声后的解一定会和原假设的解有细微的出入,这反而恰能证明算法具有比较高的精确性。

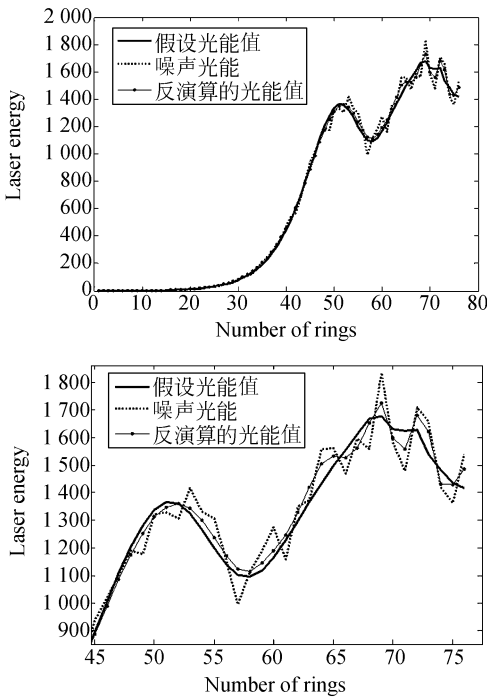


图 6 正则化参数 $\alpha=10^6$ 时的假设光能, 噪声光能, 反演算光能曲线的对比图及局部放大
 Fig. 6 Difference among assumed energy, noise energy and inversed energy

图像和数据都证明了加入正则化模块后,反演算在精确性略降低的同时能大大提高解的光滑性,即现实可信度。为了更大程度地挖掘正则化在这一方面的潜力,下节将比较几种正则化矩阵,并选取合适的正则化矩阵和一种合适的正则化方法。

2.2.2 正则化矩阵的选取

通常的正则化矩阵都是对角矩阵或类对角矩阵,如 Tikhonov 标准型中的 $L=I$ 。这可能是因为对角或类对角矩阵的正则化矩阵对原问题的条件数有较好的改良能力,同时又不会对原矩阵造成太大的影响。又比如经典的 Twomey 算法中所采用的正则化矩阵为:

$$L_i = L^{-1}L = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Hansen^[8]也提到了两个正则化常用的矩阵

算子 L_1 和 L_2 及其各种组合形式,用于图像修复处理。

$$L_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \dots & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

梁^[7]提出了另一种正则化矩阵:

$$L_i = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & & & \\ & -1 & 3 & -3 & 1 & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & -1 & 3 & -3 & 1 \\ & & & & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

可见,这些正则化矩阵的主要作用是使解变得光滑, x 越光滑,第二项范数 $\|L^{-1}Lx\|_2$ 越小。

从图 7 中可见,采用 Tikhonov 标准型正则化矩阵 $L_{ii}=I$ (对角为 1 的方阵)和 Hansen 提出的 L_i 矩阵算子的算法余值随着正则化参数的增大而迅速增大,这样很容易使正则化后的问题偏离原问题。而采用 Twomey 光滑矩阵 L_i , Hansen 提出的矩阵 L_2 ,和梁^[9]提出的 L_1 矩阵作为正则化矩阵算子,其算法余值虽然也随着正则化参数的增大而增大,但是增大速度相对低,其中

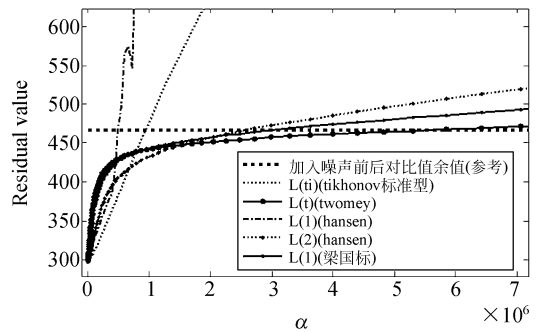


图 7 不同正则化矩阵在不同正则化参数下的余值比较
 Fig. 7 Residual values at different regularization matrices and parameters

尤以采用 Twomey 光平滑矩阵 L_t 的算法余值增长率最佳。

2.2.3 正则化参数和正则化矩阵的配合选取

采用 Twomey 的光平滑矩阵时,正则化参数的选取也是一个不可忽视的环节,正则化参数 α 的选取是否适当,不仅影响着算法的收敛性,还影响着所求得解是否收敛于问题的真实解。

在参数选取上,将 GCV 函数选取法^[3]:

$$GCV(\alpha) \equiv \frac{\|b - Ax\|^2}{(tr(I - AA^\#))^2} = \frac{\|(L - AA^\#)b\|_2^2}{(tr(L - AA^\#))^2} \quad (6)$$

与 L 曲线(L-Curve)法^[8]进行了对比。

可见 GCV 法中正则化参数是直接根据已知矩阵 A , 向量 b 和正则化矩阵 L 所计算出来的,而 L 曲线法则要根据枚举 n 次不同的正则化参数进行实验^[10],从中直观地“挑出”达到最佳的平衡点。两种方法相比起来各有其优点,GCV 方法快捷、方便,并可以对其进行加工改进,但是所得的结果不一定能达到最佳的平衡点;L 曲线法的计算强度高,约为 GCV 法的 n 倍(n 为 L 曲线所采集的正则化参数数据点的个数)。以 Twomey 光平滑矩阵算子为例,L 曲线法和 GCV 方法的应用结果比较如下。

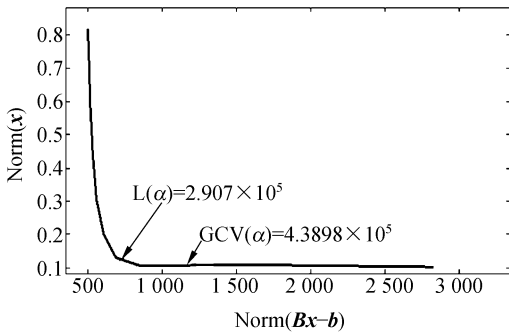
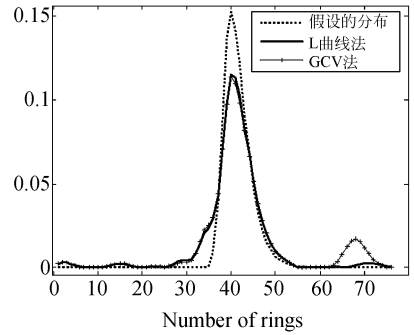


图 8 L 曲线法与 GCV 法的正则化参数

Fig. 8 Regularization parameters of L-curve method and GCV method

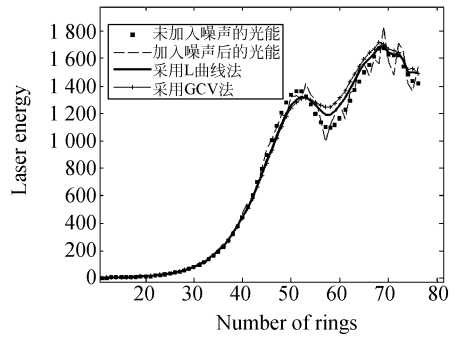
由式 6 得 $GCV(\alpha) = 4.3898 \times 10^5$, 而用 L 曲线法计算得 $\alpha = 2.907e+005$ 。可以说两者相差并不大,但是从 L 曲线上来看,GCV 法所取的点偏右,也就是说它的横坐标余值 $norm(Bx - b)$ 项大于 L 曲线法,而纵坐标余值 $norm(x)$ 也只比 L 曲线法稍小。由图 8 可推测 L 曲线法的正则化

参数应该更优于 GCV 法,为了验证这一猜测,图 9 给出了 x 解的分布曲线和光能分布曲线。



(a) 解的对比

(a) Comparison of solutions



(b) 光能曲线的对比

(b) Comparison of optic energy curves

图 9 L 曲线法和 GCV 法选取参数对算法的影响对比
Fig. 9 Comparison between L-curve method and GCV method

可见,两种方法的解和计算光能曲线均相差不多,但仔细比较可以发现 L 曲线法的解稍平滑,而且计算光能曲线与反演算的噪声光能曲线拟合得更好,因此可以总结出,GCV 法快速,而 L 曲线法性能稍优。在参数选择方面综合了两种方法的长处,即先采用 GCV 法计算出参数 α ,然后在该参数 α 的数集 $[\frac{\alpha}{2}, 2\alpha]$ 内以 $\frac{\alpha}{4}$ 为间隔分取 5 点值: $\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{4}, \alpha, \frac{5\alpha}{4}, 2\alpha$ 进行 L 曲线法分析,从而选出较优参数。

2.3 松弛迭代对算法的影响

松弛迭代法是 Gauss-Seidel 法的改进,它可

以加速迭代过程:

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \omega \mathbf{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega) \mathbf{x}_i^{(k)}. \quad (7)$$

显然,由于新值 $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ 通常优于旧值 $\mathbf{x}_i^{(k)}$,所以可将两者组合成松弛值 $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ 以尽量发挥新值的优势。

之所以要采用松弛迭代法作为继承共轭梯度法第二步的迭代方法是因为它的迭代过程比较稳定,而且对负值的处理较好。松弛迭代法的主要参数有迭代次数(中止条件)和松弛因子 ω 。通常迭代次数主要是要在精度和速度之间找到平衡,松弛因子 ω 值的范围在 1.1~1.5 之间。本文对松弛算法的这两个参数进行了测试,测试条件为:使用共轭迭代法作为预迭代,使用 Twomey 正则化矩阵,综合 GCV 法和 L 曲线法选取正则化参数,对 500 次内的迭代余值 $\text{norm}(\mathbf{B}\mathbf{x}-\mathbf{b})$ 进行对比分析。

3 结 论

激光粒度仪所采用的反演算法较多,但各单一的方法都会存在这样或那样的不足,应寻找一种能扬长避短的综合算法,以达到准确性、稳定性、加速性和光滑性的统一。

本文所述这种综合算法采用的 3 种算法分别具有一定的功能。其一,共轭梯度法旨在快速地找到第二步迭代的初值,而且该初值本身的余值已达到较好的水平。采用共轭梯度法作为预迭代法比不采用预迭代法所获的解更快更优。其二,正则化法的意图在于降低方程的病态性,使方程趋于良态易解。分析表明,采用正则化法后方程的条件数可降为原条件数的 10^{-11} 。其三,松弛迭代法作为第二步迭代过程对第一步迭代的值进行了重新迭代,解决了共轭梯度法对负数解无能为力缺点。因此,这种综合算法兼顾了 3 种算法的长处,分别应用了共轭梯度法的收敛速度、正则化的抗噪声能力和松弛迭代法的负数处理能力。与此同时,还避开了 3 种算法的缺点,如共轭梯度对负数解的处理能力不佳、正则化法的参数选择问题和松弛迭代法的收敛速度问题。另外,经国家标准颗粒样品验证,在综合 3 种思想的同时,参数的选择能达到目的性的统一,不会在不同算法的接口处发生错误。通过分块把算法分成 3 个模块分别进行参数的选择在整体上依然能够发挥正常的优化作用。

通过实验最终确定的最佳参数为:共轭梯度法的迭代次数为 50 次,松弛迭代法的迭代次数为 250 次,正则化矩阵为 Twomey 光顺矩阵算子,正则化参数为 $\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{4}, \frac{5\alpha}{4}, 2\alpha$ 在 L 曲线法中求得的最优点(α 为 GCV 方法的计算值),松弛因子为 1.2。

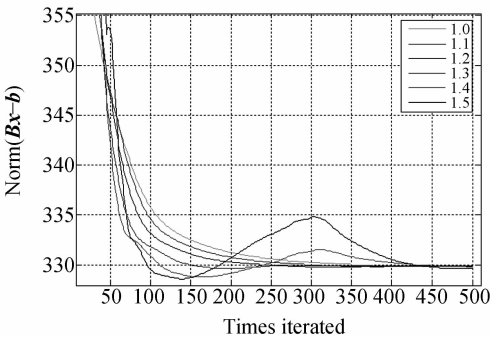


图 10 不同松弛因子 ω 迭代法的迭代次数与余值图

Fig. 10 Residual values of different SOR factors ω

由图 10 可见,松弛因子越大,最初的 100 次迭代越快,但是,如果松弛因子过大,会造成迭代过程不稳定。总的来说,参数为 1.2 和 1.3 时迭代加速性质和稳定性都比较优秀,基本上能在接下来的 150 次迭代过程中得到稳定的解。因此,所采用迭代次数为 250,松弛因子为 1.2。

参考文献:

- [1] 栾志超. 激光粒度仪的无模式数据处理算法研究 [D]. 天津: 天津大学, 2005.
LUAN ZH CH. *Studies on non-model inversion algorithms for particle size analysis in laser sizer*

[D]. Tianjing: Tianjing University, 2005. (in Chinese)

- [2] 王乃宁. 颗粒粒径的光学测量技术及应用 [M]. 北京: 原子能出版社, 2000.

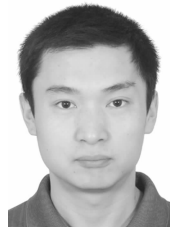
WANG N N. *Optical measurement for particle*

- size analysis [M]. Beijing: Nuclear Energy Press, 2000. (in Chinese)
- [3] KANDLKAR M, RAMACHANDRAN G. Inverse methods for analyzing aerosol spectrometer measurements; a critical review [J]. *J. Aerosol Sci.*, 1999,30(4):413-437.
- [4] VARGAS-UBERA J, AGUILAR J F, GALE D M. Reconstruction of particle size distribution from light-scattering patterns using three inversion methods [J]. *Applied Optics*, 2007,46(1):124-132.
- [5] BAGLAMA J, REICHEL L. Decomposition methods for large linear discrete ill-posed problems [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007,198:332-343.
- [6] 陈琪星,王燕民. 激光粒度测量中的一种无模式综合反演算法 [J]. *中国粉体技术*, 2008,14(3):10-14.
CHEN Q X, WANG Y M. A hybrid non-model algorithm for laser-scattering particle sizing [J]. *China Powder Tech.*, 2008,14(3):10-14. (in Chinese)
- [7] 肖庭延,于慎根,王彦飞. 反问题的数值解法[M]. 北京:科学出版社,2003.
XIAO T Y, YU SH G, WANG Y F. *Solutions for inversion problems* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)
- [8] HANSEN P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve [J]. *SIAM Review*, 1992,34(4):561-580.
- [9] 梁国标,王燕民,李新衡,等. 由 Mie 散射光强反演颗粒粒度分布的一种改进正则化法 [J]. *光电工程*, 2006,33(12):44-49.
LIANG G B, WANG Y M, LI X H, *et al.*. Modified regularization method applied to the inversion of particle size distribution from light scattering data [J]. *Opt-Electronic Engineering*, 2006, 33(12): 44-49. (in Chinese)
- [10] LLOYD J J, TAYLOR C J, LAWSON R S, *et al.*. The use of the L-curve method in the inversion of diffusion battery data [J]. *J. Aerosol Sci.*, 1997,28(7):1251-1264.

作者简介:



王燕民(1956—),男,湖南长沙人,博士,教授,1993年于瑞典Lulea大学获得哲学博士学位,现为华南理工大学教授,博士生导师,主要从事微纳颗粒技术及表征的研究等工作。E-mail: wangym@scut.edu.cn



潘志东(1977—),山东潍坊人,博士研究生,讲师,2002年于华南理工大学获得硕士学位,现为华南理工大学讲师,主要从事于颗粒制备及表征的研究。E-mail: panzd@scut.edu.cn



陈琪星(1984—),江西九江人,工程师,2008年于华南理工大学获得硕士学位,现在广州基业长青建材科技有限公司任研发工程师,主要从事颗粒表征和粒度仪软件开发的研究。Email: chenqixing@sina.com